Παρατηρήσεις

Διαγώνισμα Β Λυκείου

A1. σελ. 21

A2. i) $\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma B}=\vec{AB}$

ii) $\vec{A\Gamma}-\vec{\Delta\Gamma}=\vec{A\Delta}$

iii) $\vec{AB}+\vec{B\Delta}-\vec{\Gamma\Delta}-\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}+\vec{\Delta\Gamma}+\vec{\Gamma A}=$
$=\vec{A\Delta}+\vec{\Delta A}=\vec{0}$

A3. $\vec{OA}=\vec{i}$ $\quad \vec{OB}=\vec{j}$

i) $\vec{OK}=2\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$ $\qquad \vec{OE}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$

$\vec{O\Theta}=\frac{3}{2}\vec{i}+\vec{j}$ $\qquad \vec{OZ}=0\vec{i}+2\vec{j}$

ii) $\vec{EK}=\vec{OK}-\vec{OE}=2\vec{i}+\cancel{\frac{1}{2}\vec{j}}-\frac{1}{2}\vec{i}-\cancel{\frac{1}{2}\vec{j}}=\frac{3}{2}\vec{i}$

$\vec{ZE}=\vec{OE}-\vec{OZ}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}-2\vec{j}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{3}{2}\vec{j}$

$\vec{\Theta Z}=\vec{OZ}-\vec{O\Theta}=0\vec{i}+2\vec{j}-\frac{3}{2}\vec{i}-\vec{j}=-\frac{3}{2}\vec{i}+\vec{j}$

iii) $\vec{\Delta K}=\vec{OK}-\vec{O\Delta}=2\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}-(\vec{i}+\vec{j})$
$=\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$

άρα $\vec{\Delta K}=(1,-\frac{1}{2})$

$|\vec{\Delta K}|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

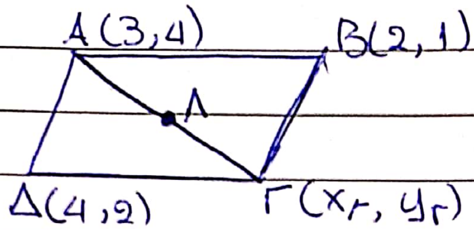
iv) $\vec{\Delta E}=\vec{OE}-\vec{O\Delta}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}-\vec{i}-\vec{j}=-\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$

$\vec{\Delta E}=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

$\varepsilon\varphi\omega=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=1$ άρα $\hat{\omega}=45^\circ$ ή $\hat{\omega}=180^\circ+45^\circ$

Άρα $\hat{\omega}=180^\circ+45^\circ$ γιατί το πέρας είναι στο 3^o τεταρτημόριο.

A_4. i) $A(3,4)$ $B(2,1)$ $\Delta(4,2)$



Εφόσον το ΑΒΓΔ παρ/μο ισχύει:

$\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma} \iff$

$\Lambda\left(\frac{3+3}{2}, \frac{4-1}{2}\right)$ $(-1, -3) = (x_\Gamma - 4, y_\Gamma - 2)$

άρα

$\Lambda\left(3, \frac{3}{2}\right)$

$\left.\begin{aligned} x_\Gamma - 4 &= -1 \\ y_\Gamma - 2 &= -3 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} x_\Gamma &= 3 \\ y_\Gamma &= -1 \end{aligned}$ $\Gamma(3, -1)$

Θέμα Β.

B_1 $\vec{\alpha} = (3,6)$ $\vec{\beta} = (4,8)$ $\vec{\gamma} = (-2,1)$

i) Νδο $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

αρκεί νδο $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \iff$

$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$

Νδο $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$ δεν είναι συγγ.

$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 12 = 15 \neq 0$

ii) $\kappa = ?$ ώστε $\vec{w} = (\kappa, \kappa - 6)$ να είναι παράλληλο με το $\vec{u} = \vec{\alpha} + 4\vec{\gamma}$

$\vec{u} = (3,6) + 4(-2,1) = (3,6) + (-8,4)$
$= (-5, 10)$

Εφόσον $\vec{u} \parallel \vec{w} \iff \begin{vmatrix} \kappa & \kappa - 6 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = 0 \iff$

Παρατηρήσεις

$10K + 5(K-6) = 0 \Leftrightarrow 10K + 5K - 30 = 0 \Leftrightarrow$

$15K = +30$

$K = 2.$

B_2. A, B, Γ, Δ, E ισχύει:

$3\vec{EB} + 5\vec{AB} + 7\vec{EA} + 2\vec{A\Delta} - 10\vec{E\Gamma} = \vec{0}$ Νδο B, Γ, Δ συνευθ

Αρκεί νδο

$\vec{B\Gamma} = \lambda \vec{\Gamma\Delta}$ ή $\vec{\Gamma\Delta} = \kappa \vec{B\Delta}$

Εστω A σημείο αναφοράς

$3(\vec{AB} - \vec{AE}) + 5\vec{AB} + 7\vec{EA} + 2\vec{A\Delta} - 10(\vec{A\Gamma} - \vec{AE}) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$3\vec{AB} - \cancel{3\vec{AE}} + 5\vec{AB} + \cancel{7\vec{EA}} + 2\vec{A\Delta} - 10\vec{A\Gamma} + \cancel{10\vec{AE}} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$8\vec{AB} + 2\vec{A\Delta} - 2\vec{A\Gamma} - 8\vec{A\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$8\vec{AB} + 2\vec{A\Delta} + 2\vec{\Gamma A} + 8\vec{\Gamma A} = \vec{0} \Leftrightarrow$

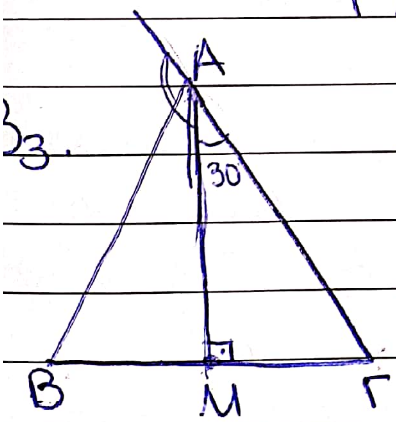
$8(\vec{\Gamma A} + \vec{AB}) + 2(\vec{\Gamma A} + \vec{A\Delta}) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$8\vec{\Gamma B} + 2\vec{\Gamma\Delta} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$8\vec{\Gamma B} = -2\vec{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow$

$\vec{\Gamma\Delta} = -4\vec{\Gamma B}$ άρα B, Γ, Δ συνευθ.

B_3.



$AB = A\Gamma = B\Gamma = 10$

$(\widehat{\vec{AB}, \vec{A\Gamma}}) = 60^\circ$

$(\vec{AM}, \vec{B\Gamma}) = 90^\circ$

$(\vec{AM}, \vec{\Gamma A}) = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

$(\vec{BM}, \vec{\Gamma M}) = 180^\circ$

$(\vec{\Gamma M}, \vec{\Gamma B}) = 0^\circ$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

Θέμα Γ.

$Γ_1$. Σελ. 60

$Γ_2$ Ορισμοί σελ. 31 − 32 − 36

$Γ_3$ i) 1° σχ. Απ' το $(-\infty, 1]$ η f ↘

$[1, +\infty)$ η f ↗

2° σχημα

$(-\infty, 0]$ η f ↗

$[0, 2]$ η f ↘

$[2, +\infty)$ η f ↗

3° σχημα

$(-\infty, -1]$ η f ↘

$[-1, 0]$ η f ↗

$[0, 1]$ η f ↘

$[1, +\infty)$ η f ↗.

1° σχημα

ii). Στη θέση $x_0 = +1$ η f παρουσ
ελάχιστο το $f(1) = -1$

3° σχ. Στη θέση $x = -1$ η f παρουσιάζει
ελαχιστο το $f(-1) = -2$ και στη
θέση $x = 1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο
το $f(1) = -2$.

iii. Η $3^η$ είναι άρτια

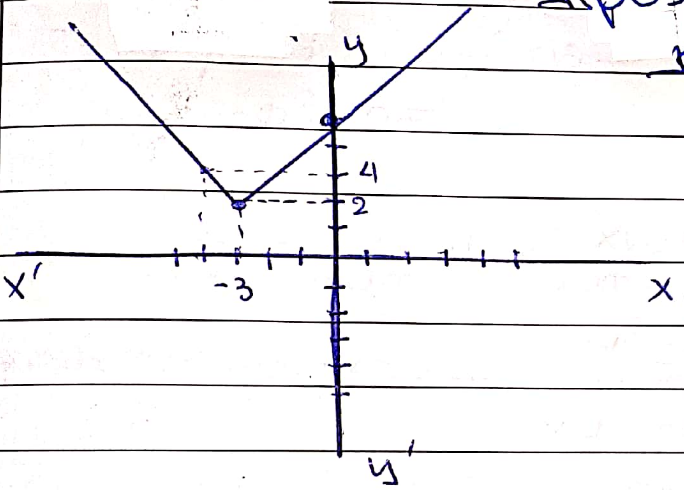
Scanned with CamScanner

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

Γ4. $K(x) = |x+3| + 2$

Η $K(x)$ γίνεται από μια οριζόντια μετατόπιση της $f(x) = |x|$ προς τα αριστερά κατά 3 κ' από μια κατακόρυφη προς τα πάνω κατά 2.



Θεμα Δ

Δ1 $\dfrac{\text{ημ}(5\pi+\varphi)\cdot\text{συν}(7\pi-\varphi)\,\text{ημ}(\frac{5\pi}{2}-\varphi)\cdot\text{συν}(\frac{7\pi}{2}+\varphi)}{\text{σφ}(5\pi+\varphi)\cdot\text{ημ}(7\pi-\varphi)\cdot\text{συν}(\frac{5\pi}{2}-\varphi)\cdot\text{σφ}(\frac{7\pi}{2}+\varphi)} = \text{ημ}^2$

- $\text{ημ}(5\pi+\varphi) = \text{ημ}(4\pi+\pi+\varphi) = \text{ημ}(\pi+\varphi) = -\text{ημ}\varphi$
- $\text{συν}(7\pi-\varphi) = \text{συν}(6\pi+\pi-\varphi) = \text{συν}(\pi-\varphi) = -\text{συν}\varphi$
- $\text{ημ}(\frac{5\pi}{2}-\varphi) = \text{ημ}(\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\varphi) = \text{ημ}(\frac{\pi}{2}-\varphi) = \text{συν}\varphi$
- $\text{συν}(\frac{7\pi}{2}+\varphi) = \text{συν}(\frac{4\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}+\varphi) = \text{συν}(\frac{3\pi}{2}+\varphi) = \text{ημ}\varphi$
- $\text{σφ}(5\pi+\varphi) = \text{σφ}(4\pi+\pi+\varphi) = \text{σφ}\varphi$
- $\text{ημ}(7\pi-\varphi) = \text{ημ}(6\pi+\pi-\varphi) = \text{ημ}(\pi-\varphi) = \text{ημ}\varphi$
- $\text{συν}(\frac{5\pi}{2}-\varphi) = \text{συν}(\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\varphi) = \text{ημ}\varphi$
- $\text{σφ}(\frac{7\pi}{2}+\varphi) = \text{σφ}(\frac{4\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}+\varphi) = \text{σφ}(\frac{3\pi}{2}+\varphi) = -\text{εφ}\varphi$

αρατηρήσεις

αντικαθιστώντας στην παράσταση έχουμε:

$$\frac{(-\eta\mu\varphi)(-\sigma\upsilon\nu\varphi)\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\cancel{\eta\mu\varphi}}{\sigma\varphi\varphi\cdot\eta\mu\varphi\cdot\cancel{\eta\mu\varphi}\cdot(-\varepsilon\varphi\varphi)}=$$

$$\frac{\cancel{\eta\mu\varphi}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}{-\sigma\varphi\varphi\cdot\varepsilon\varphi\varphi\cdot\cancel{\eta\mu\varphi}}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{-1}=$$

$$-\sigma\upsilon\nu^2\varphi=-(1-\eta\mu^2\varphi)=$$

$$=\eta\mu^2\varphi-1$$

Δ_2 Νδο $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$

$$\frac{\overset{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{1-\eta\mu x}+\frac{\overset{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{1+\eta\mu x}=\cancel{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x+\cancel{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}+\sigma\upsilon\nu x-\cancel{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}=$$

$$\frac{2\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}=\frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$$

Δ_3. i) Αν $\eta\mu\omega=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\pi<\omega<\frac{3\pi}{2}$

$\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=1\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\eta\mu^2\omega\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\frac{5}{9}\Leftrightarrow$ $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{4}{9}\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\omega=\pm\frac{2}{3}$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{2}{3}$ εφόσον $\pi<\omega<\frac{3\pi}{2}$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\cancel{-}\frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}}}{\cancel{-}\frac{2}{\cancel{3}}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\sigma\varphi\omega = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

iii) Νδο για οποιοδήποτε $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\frac{\eta\mu(\pi+\theta)}{\eta\mu(\frac{3\pi}{2}+\theta)} - \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}+\theta) \geq -3\sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow$

$\frac{\cancel{-}\eta\mu\theta}{\cancel{-}\sigma\upsilon\nu\theta} - (-\sigma\varphi\theta) \geq -3(-\frac{2}{3}) \Leftrightarrow$

$\sigma\varphi\theta + \varepsilon\varphi\theta \geq 1 \cdot 2$

$\frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} + \varepsilon\varphi\theta \geq 2 \Leftrightarrow$ $\varepsilon\varphi\theta > 0$ στο $(0, \frac{\pi}{2})$

$\varepsilon\varphi\theta \cdot \frac{1}{\cancel{\varepsilon\varphi\theta}} + \varepsilon\varphi^2\theta \geq 2\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi^2\theta - 2\varepsilon\varphi\theta + 1 \geq 0$

$(\varepsilon\varphi\theta - 1)^2 \geq 0$

που ισχύει για κάθε $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$